LA SCIENZA DEL CAOS E IL COMPUTER

Giancarlo Storti Gajani

L'approccio riduzionista considera naturale descrivere con modelli ciò che si vede in natura. I limiti della matematica rendono impossibile racchiudere in equazioni il comportamento di entità, anche molto comuni, quali la forma delle nuvole. La dinamica nonlineare, impensabile senza i computer, dà nuove possibilità di affrontare questi problemi. L'articolo introduce alcuni aspetti della dinamica nonlineare, limitandosi ai sistemi in cui il tempo è una variabile continua.

1. INTRODUZIONE

Definire la "scienza del caos" in modo rigoroso e tale da non scontentare nessuno tra coloro che se ne occupano è ancora abbastanza difficile, trattandosi di una scienza giovane. Malgrado si possa senz'altro fare di meglio, possiamo iniziare con il dire che la scienza del caos si occupa in prima istanza di sfatare il mito secondo il quale determinismo sia uguale a determinabilità e di scoprire come sia più norma che accidente il fatto che, in molti fenomeni fisici, condizioni iniziali impercettibilmente differenti possano corrispondere a risultati finali enormemente diversi. La realtà è nonlineare e anche se si può dire molto su un fenomeno "facendo finta" che sia lineare (e molta ricerca scientifica fino ai tempi più recenti si è basata su questo assunto) si finirà inevitabilmente col perdere la percezione di aspetti della realtà comuni e sotto gli occhi di tutti. La forma delle nuvole, il lancio di un dado, la turbolenza in un fluido o la crescita di una pianta sono tutti fenomeni difficilmente spiegabili con modelli semplici. Fortunatamente, per vedere esempi di comportamento deterministico, ma difficilmente determinabile, non è necessario considerare situazioni così complesse. Fenomeni fisici apparentemente molto semplici e i cui modelli matematici sono costituiti da pochissime equazioni possono avere comportamenti anche estremamente complicati. In questo articolo ci siamo limitati a sistemi e modelli in cui il tempo può essere considerato una variabile continua. Ci sono molti casi in cui è opportuno considerare il tempo come una variabile discontinua, generalmente definita solo su una successione di istanti equispaziati tra loro ed è il caso dei sistemi a tempo discreto. Questi ultimi hanno caratteristiche molto interessanti, ma possono portare ancora più facilmente a comportamenti complessi.

2. MODELLI DELLA REALTÀ E SISTEMI DINAMICI

"...*Questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer* *i caratteri ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali è impossibile a intendere umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto".*

Galileo Galilei, Opere VI

Molti, e non a torto, considerano Galileo il padre del metodo scientifico occidentale: il "grande libro" di cui parla è la natura e l'idea di poterne scrivere le leggi in termini rigorosi ha da sempre caratterizzato tutta la ricerca scientifica. L'analisi sperimentale di un fenomeno fisico ne permette la riduzione ad un modello matematico, ulteriori esperimenti permettono di convalidare e perfezionare questo modello che, una volta ben definito, può essere usato per dedurre una teoria che spieghi altri fenomeni fisici, possibilmente più generali e anche diversi da quelli dai quali si è partiti. Tutto ciò che noi oggi chiamiamo scienza si basa su questo principio metodologico, e tutto ciò che chiamiamo tecnologia deve tantissimo, anzi, tutto, al rigore del metodo scientifico galileiano.
La realtà evolve nel tempo, farne dei modelli implica nella maggior parte dei casi riassumere in un certo numero di equazioni, le cui variabili misurino in qualche modo lo "stato" in cui si trova l'entità che si sta studiando, le leggi che governano l'evoluzione temporale del fenomeno. Le soluzioni di queste equazioni rappresentano quindi il comportamento del modello e permettono, se le equazioni sono corrette, di tentare di prevederne l'evoluzione. In generale non si usano tutte le possibili variabili che rappresentano un fenomeno: se per esempio volessimo studiare il movimento dei pianeti nel sistema solare potremmo, in prima approssimazione, rappresentare il Sole e i pianeti come punti dotati di massa e la loro posizione con le coordinate di ognuno di questi punti nello spazio tridimensionale rispetto ad un qualche sistema di riferimento. Le equazioni che descrivono il moto dei pianeti, si riducono allora alle ben note leggi della dinamica ed alla legge di gravitazione di Newton; se si vuole maggiore precisione si possono aggiungere le correzioni relativistiche, ma a nessuno verrà mai in mente di complicare il modello includendo, per esempio, lo stato della atmosfera o le condizioni politiche delle nazioni terrestri. Il modello migliore risponde quindi ad un principio di economia: deve includere *tutte e sole* le informazioni che permettono di risolvere il problema che ci interessa.
Consideriamo ora un semplice sistema che evolve nel tempo, essendo il sistema puramente ideale è di fatto già un modello. Prendiamo una pallina, immaginiamola dotata di peso ed appoggiamola su una superficie, non necessariamente piana. Se immaginiamo che tra pallina e superficie ci sia una qualche forma di attrito e se pensiamo ad una superficie a forma di scodella tutti sappiamo che la pallina finirà per stabilirsi sul fondo della scodella. Il fondo della scodella è il punto di equilibrio di questo semplice sistema, e, visto che perturbando leggermente la pallina questa tornerà comunque sul fondo, il punto di equilibrio è stabile (Figura 1 **A**). Modifichiamo la scodella, cambiandone la curvatura fino a trasformarla in un piano. Ora la pallina resta ferma in qualsiasi punto venga appoggiata, e piccole perturbazioni porteranno la pallina in posizioni differenti: tutti i punti del piano sono di equilibrio indifferente (Figura 1 **B**). Se infine trasformiamo la scodella in una collina (invertendone la curvatura) la pallina sfuggirà da dove la poniamo, a meno di non posizionarla, con estrema precisione, sul punto più alto. La cima della collina è ancora un punto di equilibrio, ma in questo caso instabile (Figura 1 **C**) e qualsiasi perturbazione, con il nostro semplice modello, comporta per la pallina un viaggio verso l'infinito.

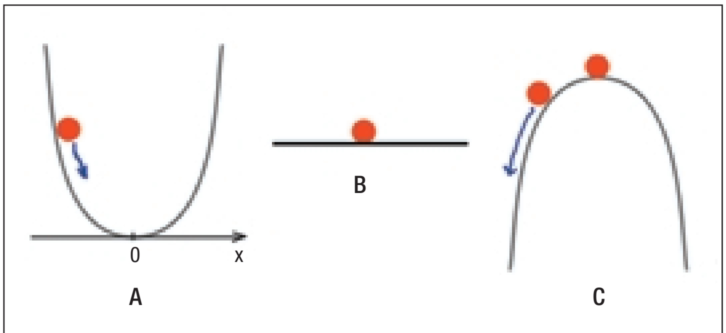

FIGURA 1
Il sistema "pallina + scodella" per diversi valori di curvatura della scodella:
A *Curvatura positiva;* **B** *Curvatura nulla;* **C** *Curvatura negativa*

Come si può notare, malgrado le tre situazioni siano descritte dallo stesso modello di base, si hanno comportamenti decisamente diversi tra loro, cambiando solo un *parametro* del modello: la curvatura della superficie. È cioè possibile scrivere una *unica* equazione con un parametro che rappresenta la curvatura della superficie che descrive i tre diversi comportamenti di figura 1. I cambiamenti strutturali nella dinamica di un sistema al variare di uno o più parametri sono chiamati *biforcazioni*, lo studio delle biforcazioni di un sistema è fondamentale per capirne il funzionamento. Sistemi anche più complicati possono avere soluzioni stabili (a volte dette genericamente soluzioni di *regime*, dopo l'eventuale transitorio iniziale) oppure instabili, solo che in molti casi è molto più difficile classificarli.
Il caso instabile di figura 1 **C** è poi un po' inquietante, è infatti esperienza comune che i fenomeni fisici con cui abbiamo a che fare sono sempre in qualche modo stabili, almeno a lungo termine o su scala sufficientemente grande: persino un fenomeno violento come una esplosione prima o poi giunge in uno stato di quiete, e la materia espulsa da una supernova formerà plausibilmente nebulose ed eventualmente nuove stelle.
Accettare questo dato dell'esperienza corrisponde ad affermare che qualsiasi fenomeno naturale, localmente instabile, può essere descritto da un modello matematico *lineare* solo in un piccolo intorno delle sue condizioni iniziali, perché se un sistema lineare è instabile in un punto allora è necessariamente instabile in modo *globale*. Modelli nonlineari dotati di comportamento instabile in una regione circoscritta, ma stabili rispetto ad una regione più grande, sono la norma, anche nelle applicazioni pratiche. Qualsiasi oscillatore stabile (come per esempio gli oscillatori necessari al funzionamento dei calcolatori, degli orologi e di molti altri sistemi elettronici) funziona proprio grazie al fatto di essere instabile in un intorno dell'origine dello spazio di stato (in questo modo si "accende"), ma stabile in grande (in questo modo le traiettorie si stabilizzano su una ampiezza costante). La nonlinearità è dunque la norma, e non un'eccezione.

Sempre pensando al sistema pallina + scodella, rappresentiamo su un piano le variabili che rappresentano lo stato del nostro sistema e tracciamo una curva (detta *traiettoria*) che descrive l'evoluzione del nostro modello istante per istante. Le variabili che possiamo considerare sono velocità e posizione della pallina, se consideriamo il primo dei tre casi visti sopra (quello di Figura 1 **A**) abbiamo, per una generica posizione iniziale, la traiettoria mostrata nella figura 2 **A**. Se ora variamo un altro parametro del nostro modello, il coefficiente d'attrito, otteniamo, aumentandolo, le traiettorie di figura 2 **B**, ma, riducendo a zero l'attrito, le traiettorie in figura 2 **C**. Si noti come in quest'ultimo caso l'energia iniziale del sistema resti costante e la pallina continui indefinitamente ad oscillare all'interno della scodella.
Per rappresentare le traiettorie abbiamo usato un piano perché abbiamo solo due variabili di stato, ovviamente, se avessimo tre variabili di stato, dovremmo usare una rappresentazione tridimensionale e per dimensioni superiori saremmo costretti, se proprio volessimo avere una percezione geometrica visiva di quanto succede, a fare sezioni o proiezioni di queste traiettorie su sottospazi di dimensione due o tre.
Quest'ultima osservazione è molto meno banale di quanto non si possa pensare: se stiamo infatti considerando un fenomeno fisico deterministico pretendiamo senz'altro che qualsiasi suo modello sia altrettanto deterministico, e quindi che ad uno stato del modello corrisponda una ed una sola possibile evoluzione. In termini geometrici ciò implica che le traiettorie di un sistema non possono in alcun modo incrociarsi perché, se si incrociassero, in quel punto il sistema potrebbe evolvere in due modi distinti. Le conseguenze di questo fatto sono decisamente straordinarie: un modello con due sole variabili di stato potrà avere traiettorie che convergono su uno o più punti di equilibrio stabili, che sfuggono da un equilibrio instabile, oppure dei cicli periodici (traiettorie chiuse percorse all'infinito). Le traiettorie che nascono all'interno di un ciclo non potranno quindi fare altro che restare confinate all'interno del ciclo, al massimo adagiandosi su di esso, e quelle all'esterno

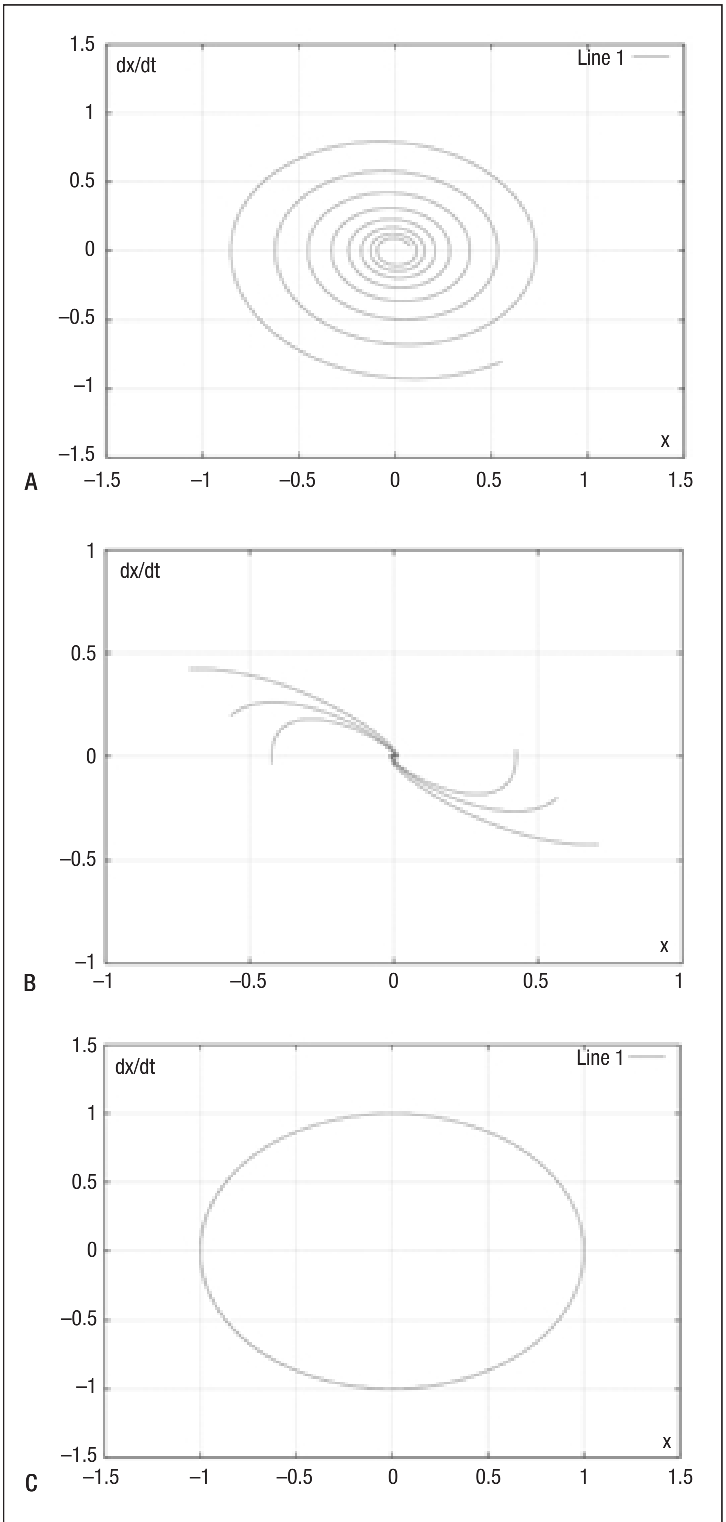

FIGURA 2

Traiettorie del sistema "pallina + scodella", lo stato iniziale è indicato con un puntino rosso; **A** *attrito "normale";* **B** *attrito "elevato";* **C** *attrito nullo*

resteranno per sempre all'esterno (uno dei pionieri nella analisi topologica delle soluzioni delle equazioni differenziali nonlineari è stato Henri Poincaré [14]).

Gli oscillatori elettronici sono sistemi con quest'ultimo tipo di traiettoria e sono presenti intorno a noi in grande numero in qualsiasi orologio, telefono cellulare, calcolatore ecc.. In figura 3 è mostrato il *ritratto di fase* dell'oscillatore di Van Der Pol, cioè alcune sue traiettorie tracciate nel piano definito dalle sue variabili di stato, la tensione sul condensatore e la corrente sull'induttore. Questo oscillatore è uno dei più semplici oscillatori elettronici, composto solo da un condensatore, un induttore ed un resistore nonlineare facilmente sintetizzabile con pochi transistor.

Talvolta, facendo misure su un fenomeno, magari finalizzate a validarne un modello, si trovano traiettorie che si incrociano: o il fenomeno è non deterministico, oppure ci si è dimenticati di una o più variabili di stato. Traiettorie che apparentemente si incrociano in due dimensioni possono infatti non incrociarsi se di dimensioni se ne hanno tre (o più), ed è immediatamente evidente che in tre dimensioni si possono avere situazioni anche molto più complicate di quelle che si hanno nelle due dimensioni.

Un semplice sistema meccanico in grado di mostrare comportamenti anche molto complessi è la cosiddetta "ruota idraulica di Lorenz" (lo schema in Figura 4). Si tratta di una ruota a pale con perdite, di notevole interesse storico, in quanto descritta da un sistema di equazioni equivalenti al modello di Lorenz, il sistema di equazioni da cui è nato il concetto di caos deterministico, e facilmente costruibile in casa (ne esistono realizzazioni perfettamente funzionanti costruite utilizzando solo bicchierini di plastica bucati).

Le variabili di stato sono in questo caso la posizione della ruota (misurata come angolo rispetto ad un certo riferimento), la velocità e l'accelerazione angolare; i principali parametri caratteristici sono la portata di fluido in ingresso e l'attrito del perno della ruota. Si nota anche solo qualitativamente (in altre parole, ad occhio) che ci troviamo in presenza di una situazione più complicata di quelle viste sopra. Le traiettorie di questo sistema, per tutto un insieme di valori dei parametri, non sono né instabili né periodiche, ma si adagia-

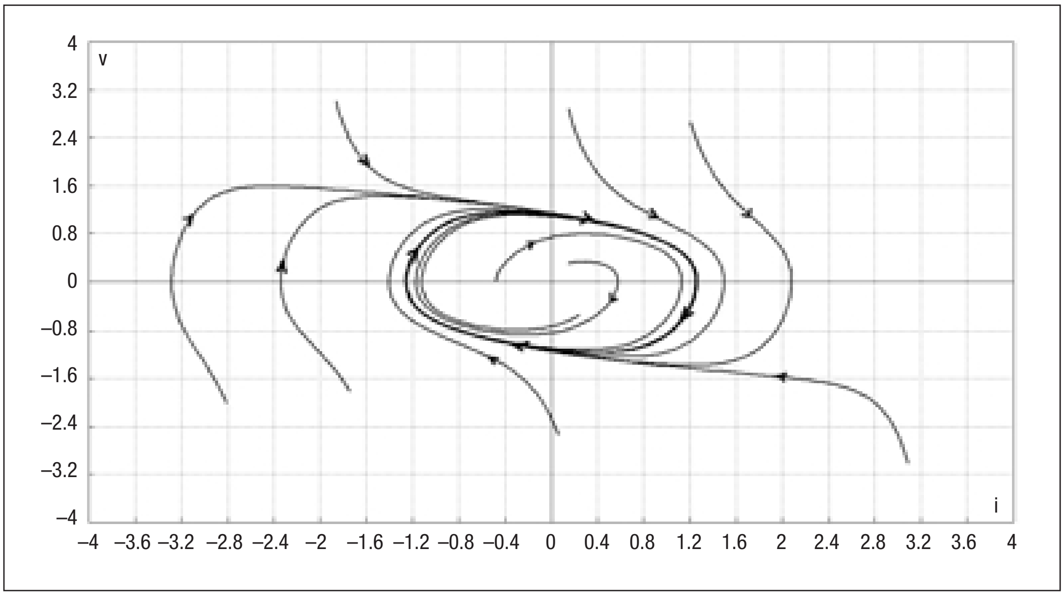

FIGURA 3

Ritratto di fase dell'oscillatore di Van Der Pol

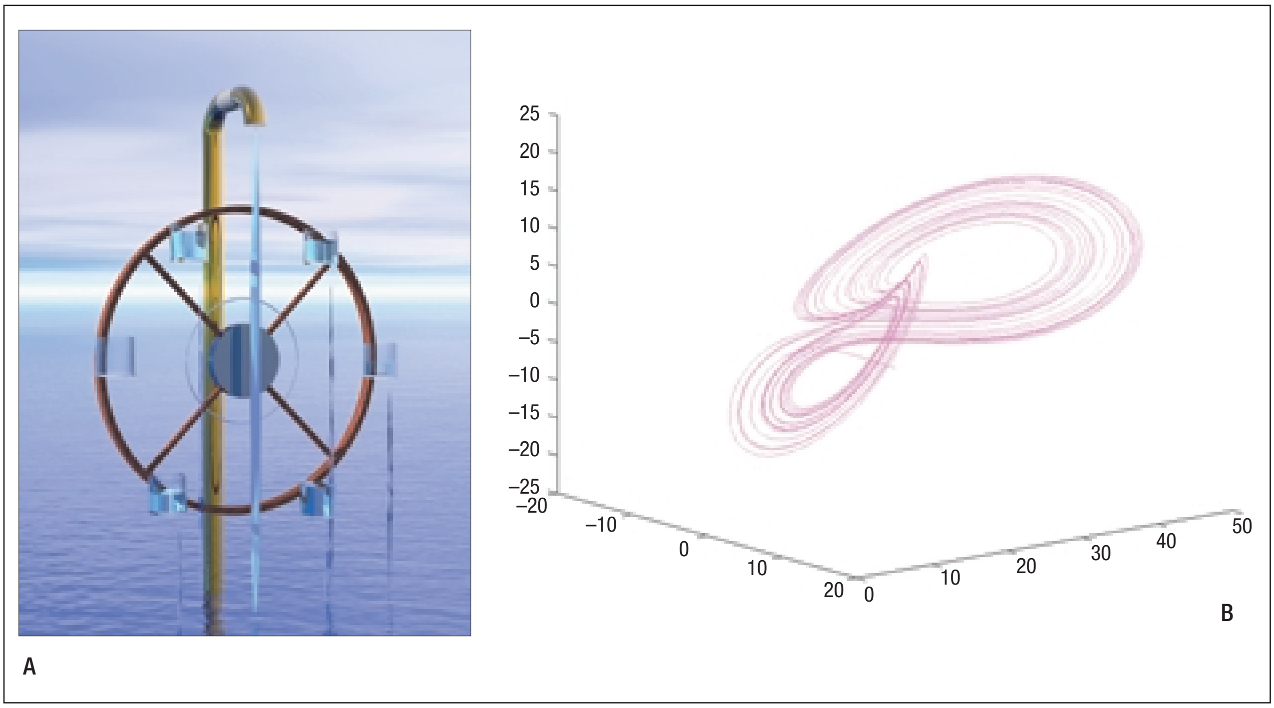

FIGURA 4

A *La ruota idraulica di Lorenz;* B *Una sua traiettoria caotica*

no su un insieme di punti dello spazio di stato dalla geometria molto complessa. Questo insieme è chiamato *attrattore strano* in quanto qualsiasi traiettoria finirà per entrare nell'insieme, come nei normali attrattori, quali punti di equilibrio stabile o cicli periodici stabili, ma è dotato di una geometria decisamente "complicata" (e quindi "strana"). Nessun punto di un attrattore strano è visitato più di una volta (non siamo quindi in un caso periodico), ma la traiettoria non sfugge dall'insieme di punti (e quindi non è instabile).

Le equazioni di Lorenz sono state originariamente scritte da Edward Norton Lorenz durante la ricerca di modelli meteorologici semplificati. Secondo quanto racconta lo stesso Lorenz [10, 11, 12] ciò che lo sorprese non fu tanto la complessità geometrica delle traiet-

torie del suo sistema, quanto la forte dipendenza dalle condizioni iniziali da lui scoperta quasi per caso. Il suo modello infatti "girava" su un calcolatore ENIAC (capace di eseguire ben 60 moltiplicazioni al secondo!) e, nel trascrivere manualmente le condizioni iniziali per il suo sistema tra due esperimenti numerici successivi, aveva troncato i numeri alla quarta cifra decimale. Le traiettorie del secondo esperimento, dopo un primo tratto quasi perfettamente in comune con il primo, proseguivano in modo diverso, ma sempre restando nella stessa "zona di funzionamento", restando, cioè, confinate nell'attrattore.
Ovviamente un sistema nonlineare può avere più di un attrattore (strano e non); in questo caso, partendo da diverse condizioni iniziali, è possibile finire su attrattori differenti. L'insieme di punti dello spazio di stato che, presi come condizioni iniziali, portano allo stesso attrattore viene chiamato *bacino d'attrazione* dell'attrattore (e i bacini di attrazione di alcuni "semplici" sistemi dinamici a tempo discreto costituiscono alcuni dei "frattali" più conosciuti, come, per esempio, il celebre insieme di Mandelbrot).

3. IL MODELLO DI LORENZ E IL RUOLO DEI CALCOLATORI ELETTRONICI

L'equazione di Lorenz rappresenta uno tra i più semplici, e senz'altro il più conosciuto, modello nel quale sono presenti attrattori caotici. La sua importanza è anche storica: proprio dalla simulazione numerica di questa equazione Lorenz si accorse della forte dipendenza di questo genere di sistemi dalle condizioni iniziali, battezzata dallo stesso Lorenz con il nome "*effetto farfalla*".
L'equazione che descrive l'evoluzione temporale del modello di Lorenz è un sistema differenziale di ordine tre, le variabili di stato sono x_1, x_2 e x_3 e le derivate rispetto al tempo sono indicate con un puntino sopra la rispettiva variabile:

$$\dot{x}_1 = ad\,(x_2 - x_1)$$
$$\dot{x}_2 = x_2 + d\,(bx_1 - x_2 - x_3\,x_1)$$
$$\dot{x}_3 = x_3 + d\,(x_1\,x_2 - cx_3)$$

I parametri sono a,b,c e d, ognuno dei quali rappresenta, nel modello di Lorenz, una qualche proprietà fisica del suo modello fluidodinamico. Le soluzioni di questa equazione dipenderanno, oltre che dai valori dei parametri, dalla condizione iniziale del sistema.
Come per la maggior parte dei casi nonlineari, non è possibile scrivere la soluzione del sistema di Lorenz in forma chiusa, ma se ne possono comunque studiare le proprietà analizzando il sistema di partenza e risolvendo numericamente le equazioni per mezzo di un calcolatore. Come già detto, l'effetto farfalla è stato scoperto fortuitamente grazie alla trascrizione manuale ed approssimata delle condizioni iniziali tra due successivi esperimenti su calcolatore elettronico. In realtà i metodi numerici per la soluzione delle equazioni differenziali esistono da molto prima dei primi calcolatori elettronici e la scoperta fondamentale di Lorenz avrebbe potuto avvenire anche senza la necessità di strumenti di calcolo, ma il tempo e lo sforzo necessari sarebbero stati immensi, anche ammettendo di avere a disposizione una macchina calcolatrice non programmabile per le operazioni aritmetiche di base. Anche se l'ingegno di numerosi studiosi "pre-computer" hanno permesso la messa a punto di strumenti teorici molto raffinati per cercare di far luce nel comportamento dei modelli nonlineari, e Poincaré si era spinto a ipotizzare la possibile esistenza di quelli che poi furono chiamati "attrattori strani", è difficile pensare allo sviluppo di questa scienza e, a maggior ragione, delle sue applicazioni, senza l'ausilio dei moderni strumenti di calcolo.
Per un insieme (abbastanza vasto) dei valori dei parametri le soluzioni del modello di Lorenz finiscono tutte, cioè per qualsiasi condizione iniziale e dopo un eventuale transitorio iniziale, su un attrattore strano (la forma di questo attrattore cambia in modo anche molto significativo al variare dei parametri). Una rappresentazione molto elegante di uno di questi attrattori, adatta a metterne in luce la complessità geometrica, si ottiene disegnandone una mappa di densità (L'attrattore in Figura 5 si ottiene per i valori dei parametri: $a = 7.906$, $b = 8.79$, $c = 3.379$ e $d = 0.079$, ed è equivalente a quello mostrato in Figura 4). Per meglio apprezzarne la complessità e la forma lo stes-

so attrattore visualizzato da diversi punti di vista è mostrato nella figura 6. Ognuna di queste figure si ottiene calcolando numericamente l'equazione di Lorenz in alcuni milioni di punti, pochi secondi sul PC che sto usando per scrivere questo testo, parecchie ore sull'ENIAC che usava Lorenz, e un tempo difficilmente quantificabile per chi volesse provare con carta e penna.

Ogni singola traiettoria del sistema di Lorenz concorre alla formazione della mappa di densità. È interessante notare che seguire una singola traiettoria per lungo tempo o tante traiettorie diverse (definite da diverse condizioni iniziali scelte a caso) da luogo alla stessa mappa. Ogni traiettoria arriverà infatti prima o poi arbitrariamente vicina a qualsiasi punto dell'attrattore, ma senza ovviamente intersecare altre traiettorie.

Gli attrattori strani come quelli mostrati in figura 5 e figura 6 sono classici esempi di *oggetti frattali*. Nel nostro caso la dimensione geometrica di questi attrattori è compresa tra 2 e 3 (per un sistema dinamico con tre variabili di stato), è cioè un numero *non intero*. La difficoltà nel comprendere che un oggetto possa avere una dimensione non intera deriva dalla nostra abitudine a trattare con le entità della geometria Euclidea. La quantità di informazione necessaria per stabilire la posizione di un punto su una qualsiasi figura della geometria classica è infatti direttamente correlata al numero di coordinate utilizzate, eventualmente definite rispetto ad un sistema di riferimento "locale". Ma quanta "informazione" è necessaria per descrivere la posizione di un punto appartenente a un attrattore strano? Si può dare una risposta a questa domanda estendendo la misura classica di dimensione con la definizione data da Hausdorf [3]: si ricopre l'oggetto di cui si vuole misurare la dimensione con *n* sfere di raggio *r* e si calcola il rapporto logaritmico tra il numero di sfere necessarie ed il loro raggio facendo tendere a zero il raggio stesso:

$$D_H = \lim_{r \to 0} \frac{\log n(r)}{\log 1/r}$$

Questa nuova e più generale definizione di dimensione coincide, ovviamente, con la misura classica per gli "oggetti geometrici" semplici. Il nome *frattale* viene usato per designare gli insiemi di punti la cui dimensione secondo Hausdorf è un numero non intero. I frattali più conosciuti sono quelli che descrivono i bacini di attrazione di sistemi dinamici a tempo discreto, come il famoso "insieme di Mandelbrot", ma si possono generare frattali anche in altri modi, per esempio iterando all'infinito delle trasformazioni geometriche su oggetti inizialmente anche molto semplici. Qualsiasi sia il sistema scelto, il numero di operazioni necessarie per ottenere frattali anche molto semplici è comunque proibitivo senza strumenti di calcolo automatico.

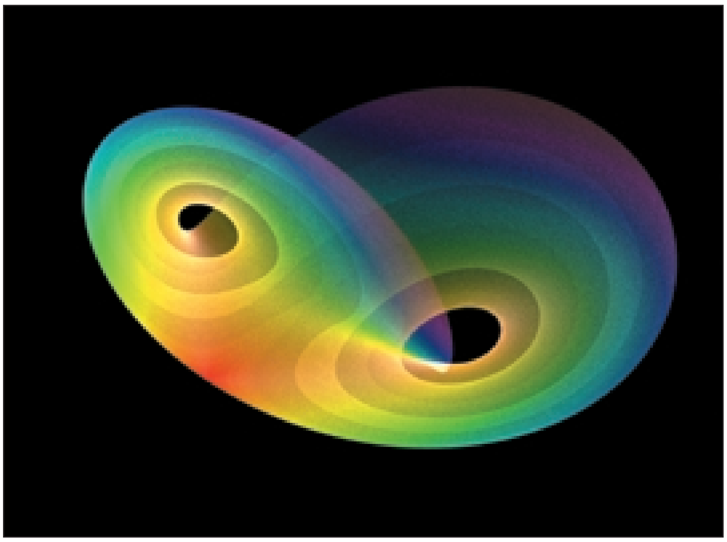

FIGURA 5

Mappa di densità di un attrattore del modello di Lorenz. I colori corrispondono a diverse velocità delle traiettorie

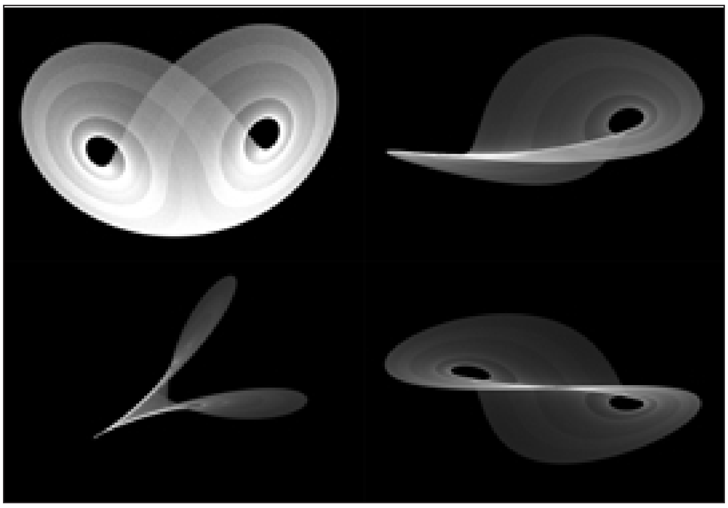

FIGURA 6

Un attrattore strano del modello di Lorenz da diversi punti di vista

4. SENSITIVITÀ ALLE CONDIZIONI INIZIALI E DETERMINABILITÀ

Se un sistema è deterministico ad ogni condizione iniziale corrisponde una singola traiettoria e a condizioni iniziali diverse corrispondono traiettorie diverse. Secoli di scienza basata su modelli lineari o linearizzati ci hanno abituato a pensare che solo la presenza di eventi casuali, cioè non deterministici, e, soprattutto, macroscopici può giustificare risultati molto diversi a partire da condizioni iniziali simili tra loro. Viene spontaneo pensare che qualsiasi piccola perturbazione dello stato iniziale di un sistema corrisponda necessariamente a variazioni altrettanto piccole nel comportamento finale. Come già visto i primi risultati di Lorenz sconfessarono questa visione del mondo: non è in generale vero che in un sistema deterministico condizioni iniziali vicine tra loro corrispondono sempre a traiettorie simili e vicine, dove "vicino" è definito secondo una qualche metrica coerente al sistema che si sta considerando. Anche piccolissime variazioni nelle condizioni iniziali possono portare due identici sistemi caotici, posti a confronto, in stati totalmente diversi a un tempo determinato. Un esempio di questo comportamento si può vedere nella figura 7, dove l'evoluzione del modello di Lorenz è confrontata, per una delle variabili di stato, a partire da due condizioni iniziali molto simili (la differenza è di 0.0001 su una sola variable di stato, $x_3(0)$, a partire dalle condizioni iniziali nominali $x_1(0) = 20$, $x_2(0) = 5$ e $x_3(0) = -5$).

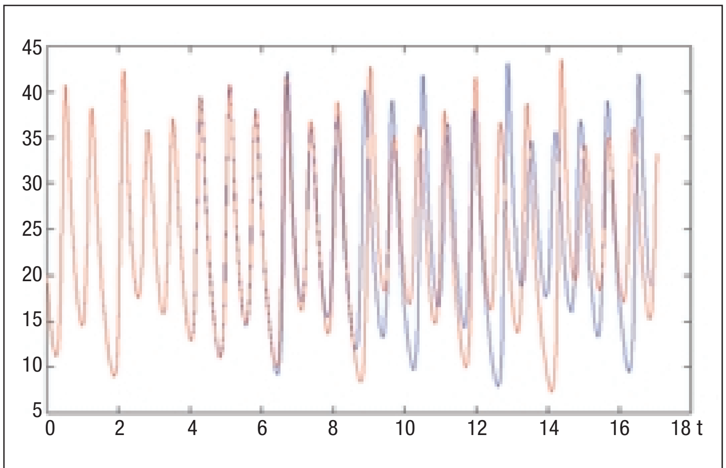

FIGURA 7

Comportamento di una delle variabili di stato del modello di Lorenz a partire da due condizioni iniziali "leggermente" differenti

Dopo un breve periodo in cui le due situazioni sono molto simili le traiettorie si allontanano, pur restando, ovviamente, confinate all'interno dell'attrattore.

Questa proprietà rappresenta per molti la definizione stessa di sistema caotico.

Il problema è allora molto serio: conoscere con precisione *infinita* lo stato iniziale di un sistema è impossibile (richiede, per lo meno, energia infinita), e quindi è impossibile determinare con sicurezza come si comporterà un sistema deterministico, ma caotico. Essendo i sistemi caotici più diffusi di quanto non si sospettasse in passato, al punto di poter dire che sono più la norma, che un'eccezione, i concetti stessi di "*casuale*" e "*deterministico, ma non determinabile*" sembrano sempre più sul punto di confondersi.

5. APPLICAZIONI

L'abitudine a credere che i sistemi semplici possano avere solo comportamenti semplici e che solo con sistemi molto complessi (eventualmente composti dalla interconnessione di molti sistemi semplici) si possano avere comportamenti complessi, ha fatto sì che molti, tuttora, credano che i sistemi caotici siano essenzialmente curiosità accademiche.

In realtà sono molto più diffusi di quanto non si creda, anzi, aver compreso che molti fenomeni naturali sono riconducibili ad una descrizione relativamente semplice, ma fortemente non lineare, ha permesso di risolvere in modo originale alcuni problemi. Le applicazioni della dinamica non lineare in generale, e della teoria del caos in particolare, sono infatti sempre più numerose. Alcune possibili applicazioni sono ancora in uno stato infantile, per esempio quelle relative ai sistemi economici, per la previsione dei mercati finanziari, o ai sistemi sociali, per la previsione delle scelte politiche; altre hanno invece già prodotto risultati interessanti.

Per tentare di dare una minima tassonomia agli usi della dinamica nonlineare e della teoria del caos considereremo tre classi principali di applicazioni: prima di tutto si farà qualche cenno ad alcune applicazioni della dinamica non lineare dove la presenza di comportamenti caotici è solo una eventualità, ma non rappresenta una condizione indispensabile per l'applicazione stessa. Una seconda classe considera poi i casi dove la presenza di situazioni caotiche è intrinseca all'applicazione, ma dove è necessario controllare il sistema, per eliminare gli effetti del caos o per scegliere uno specifico attrattore tra i tanti possibili. L'ultima classe rappresenta le applicazioni più innovative: quelle che non sarebbero pensabili senza la presenza o, addirittura, la generazione di segnali caotici da parte delll'applicazione stessa.

5.1. Applicazioni "tradizionali" della dinamica non lineare

Lo studio di molti problemi classici della fisica, anche di alcuni tra i più semplici problemi di meccanica, richiedono la soluzione di equazioni differenziali non lineari. È quindi spontaneo affermare che i campi applicativi della dinamica non lineare sono *tutti*. O almeno tutti quelli in cui è presente un qualche tipo di dinamica. Ovviamente non tutti i problemi di dinamica non lineare implicano la presenza di soluzioni caotiche. Ma, come tutti sanno, anche il classico problema dei tre corpi può avere soluzioni molto complicate (e i suoi punti di equilibrio sono i ben noti "punti di Lagrange"). Il problema è che la maggior parte delle equazioni non si possono risolvere in forma chiusa, e l'unica possibilità, per chi non disponeva di strumenti di calcolo, consisteva nell'inferire alcune proprietà della soluzione a partire dalle equazioni di partenza o semplificare notevolmente il problema linearizzando. L'avvento dei calcolatori, e quindi l'analisi numerica di sistemi di equazioni di dimensioni rilevanti, ha permesso di ampliare notevolmente la ricerca e le applicazioni già esistenti e di trovarne di nuove.

Tra i campi applicativi della dinamica non lineare in cui è possibile la presenza di soluzioni caotiche, forse i più conosciuti sono quelli tipici della fluidodinamica. I moti turbolenti nei fluidi e nei gas possono in molti casi essere riassunti e descritti in modo "macroscopico" in modo da non dover trattare nello specifico la dinamica "microscopica" sottesa. Queste semplificazioni hanno permesso, anche in epoca "pre-calcolatore" la soluzione di molti problemi importanti di fluidodinamica, descrivendo, per esempio, gli effetti di un fluido in moto turbolento in un condotto usando solo pochi parametri riassuntivi. Una descrizione più precisa di questi fenomeni è invece ora possibile e, grazie ai calcolatori, si possono per esempio progettare profili alari, turbine ed eliche, molto più efficienti.

Sempre pensando alla fluidodinamica, si è già visto come le stesse equazioni di Lorenz, oltre ad un immenso valore teorico, avevano l'intento di risolvere dei problemi di meteorologia. Una delle prime applicazioni dei grandi calcolatori è stata, ed è tuttora, proprio la soluzione di enormi sistemi di equazioni che cercano di descrivere e prevedere il tempo. Proprio a causa della rilevante sensitività allo stato iniziale le previsioni del tempo sono tanto più affidabili quanto più sono a breve termine (Figura 8).

Coloro che si occupano di studiare le vibrazioni nelle macchine e negli edifici hanno da tempo iniziato a fare uso degli strumenti della dinamica nonlineare e, ancora una volta, la possibilità di simulare strutture anche molto complesse in tempi ragionevoli ha dato nuovo impulso ad applicazioni di notevole importanza economica e umana.

Tra le altre applicazioni della dinamica non lineare sono attualmente molto importanti quelle che riguardano l'analisi dei sistemi ecologici e dell'ambiente. Anche in questi campi la ricerca è molto attiva, e c'è sicuramente molto spazio per nuove scoperte.

FIGURA 8
L'uragano Epsilon (3 dic 2005, courtesy of Nasa/Goddard space flight center)

5.2. Evitare gli attrattori "troppo strani", il controllo del caos

Molti fenomeni sono necessariamente caotici e può nascere, in alcuni casi, l'esigenza di scegliere con cura in quale attrattore si vuole che il sistema funzioni, oppure, in altri casi, si ha l'esigenza di eliminare, del tutto o in parte, i comportamenti caotici.

Malgrado una notevole regolarità di fondo, il funzionamento del cuore è, secondo molti ricercatori, essenzialmente caotico. Osservando il tracciato di un elettrocardiogramma si nota come ogni battito sia diverso dagli altri, e un cuore in buona salute è in molti casi più caotico di uno malato [4, 5, 6]. Durante un episodio di fibrillazione atriale o ventricolare, il funzionamento del cuore è ancora caotico, ma le sue variabili di stato si portano su un attrattore strano la cui dinamica è inefficace a pompare il sangue. I defibrillatori, resi famosi, spesso in modo ridicolo, dai programmi televisivi di "fiction" medica, sono macchine basate sull'idea di dare un forte shock al sistema di sincronizzazione cardiaca utilizzando una scarica elettrica di grande intensità. Si spera in questo modo di riportare il "sistema cuore" verso l'attrattore giusto. Il meccanismo spesso funziona, anche se non è privo di pericoli.

In alternativa si può pensare di sfruttare proprio la caratteristica tipica dei sistemi caotici di avere una forte dipendenza dalle condizioni iniziali. Una forte dipendenza dalle condizioni iniziali indica che piccole perturbazioni possono variare in modo anche notevole il funzionamento di un sistema. Questa specifica caratteristica è stata utilizzata per la messa a punto di un "pace-maker" basato sui principi del controllo caotico. Piccole perturbazioni, di entità controllata e applicate in istanti determinati con precisione, riescono a riportare il cuore sull'attrattore strano giusto. Per ora sono stati effettuati numerosi esperimenti su animali che hanno dimostrato la fattibilità e la correttezza di questo approccio.

Un'altra applicazione recente, sempre in campo biomedico, riguarda la previsione ed eventualmente la prevenzione degli episodi epilettici. Dagli studi compiuti su pazienti umani si è scoperto che è possibile prevedere episodi di epilessia anche con un notevole anticipo dall'analisi di alcune proprietà dei segnali di un EEG. La dimensione frattale del segnale a rischio di epilessia subisce infatti una *diminuzione* qualche tempo prima dell'insorgere dell'episodio epilettico (ancora una volta il comportamento normale pare essere *più* caotico di quello patologico). È ancora in fase di studio la possibilità di utilizzare dei "micro-elettroshock" localizzati per prevenire le fasi epilettiche acute.

5.3. Usare gli attrattori anche molto strani

Produrre caos è facile, sia con i calcolatori che con i circuiti elettronici. Il più semplice e studiato circuito dotato di attrattori strani è il *circuito di Chua*, utilizzato per la sua semplicità e il suo bassissimo costo in molte applicazioni [9]. Consideriamo ora applicazioni dove è necessario produrre attrattori strani, bacini di attrazione frattali o, uno o più segnali caotici.

L'uso forse più diffuso e più maturo commercialmente della teoria del caos, riguarda la generazione di oggetti geometrici frattali, in particolare per la generazione di paesaggi virtuali, cioè per la grafica e per le animazioni 3D. Moltissimi effetti speciali cinematografici di sintesi, soprattutto quelli che generano paesaggi virtuali, sono infatti basati sulla generazione di oggetti frattali. Qualsiasi montagna, albero, costa o roccia ha un aspetto molto più realistico se generata in modo frattale, piuttosto che utilizzando primitive geometriche classiche (come si faceva agli inizi della grafica in 3D). Nessuno dei film di animazione più recenti sarebbe possibile senza i *landscape generator* attualmente presenti anche nei prodotti di grafica commerciali e *open-source* più conosciuti ed alla portata di tutti.

Un'altra interessante caratteristica dei sistemi caotici è la loro capacità di sincronizzarsi: se si costruiscono due sistemi caotici identici (o anche solo molto simili) e si lascia che una delle variabili di stato del primo sistema sia in qualche modo accoppiata alla analoga variabile di stato del secondo sistema, si possono ottenere, purché siano soddisfatte alcune semplici condizioni, due sistemi le cui variabili di stato sono, istante per istante, identiche tra loro [14]. Immaginiamo allora di costruire due circuiti elettrici caotici identici (entro i limiti di tolleranza dei componenti) e di collegarli tra loro scegliendo una delle variabili di stato (nei circuiti elettronici le variabili di stato sono in genere le tensioni sui condensatori e le correnti

che fluiscono negli induttori); si scelga quindi un condensatore in un circuito e si colleghi uno dei suoi terminali, tramite una resistenza, al terminale equivalente dell'altro circuito.
I due circuiti si sincronizzano. Se ora sovrapponiamo un debole segnale *contenente informazione* al filo che collega tra loro i due circuiti questi restano sincronizzati, ma il segnale, confuso nel "rumore" dei sistemi caotici è totalmente inintelligibile. Sfruttando le proprietà di sincronizzazione dei due circuiti è però possibile ricostruire il segnale originale, ottenendo in questo modo la trasmissione sicura dello stesso. Se i primi esperimenti sono stati fatti utilizzando circuiti elettronici, recentemente alcuni ricercatori italiani hanno esplorato con successo la possibilità di sfruttare alcune proprietà dei laser [1]. In questa applicazione il segnale mascherato è un segnale video trasmesso via fibra ottica da un laser caotico e decrittato a destinazione utilizzando un altro sistema laser caotico.
Tra i sistemi naturali il cui funzionamento è riconducibile a modelli con dinamica caotica ci sono anche i fenomeni in cui si ha turbolenza. La turbolenza è comunemente presente nel funzionamento di molti strumenti a fiato, e la sintesi dei suoni di questi strumenti è per questo abbastanza complessa. L'uso di circuiti elettronici caotici è stato proposto per ovviare a questo problema e cercare di generare con sistemi molto semplici suoni anche molto ricchi da un punto di vista armonico [2].

6. CONCLUSIONI

La dinamica nonlineare ha ancora molte zone inesplorate e sulle quali è attiva la ricerca. Forse le più interessanti sono quelle relative ai sistemi di grandi dimensioni, tipicamente formati da un enorme numero di sistemi dinamici nonlineari interconnessi tra loro. Caratterizzare i fenomeni di sincronizzazione o dare una misura dei complicatissimi attrattori presenti in questi sistemi è ancora molto difficile e, in alcuni casi, arriva ai confini della potenza di calcolo attualmente disponibile in un normale calcolatore. Le applicazioni di questi studi, oltre che nel campo naturale dei sistemi meteorologici, permetterebbe probabilmente di migliorare la nostra conoscenza di sistemi complessi come il cervello.
I legami tra fenomeni deterministici e i fenomeni attualmente descritti esclusivamente in termini di processi casuali andrebbe forse approfondito; i sistemi dinamici nonlineari di grandi dimensioni possono infatti avere comportamenti difficilmente distinguibili da quelli che ci si aspetta da una variabile casuale.
Un'altra interessante area di sviluppo consiste nell'analisi delle biforcazioni e anche in questo caso l'uso dei calcolatori è indispensabile, se non per i casi banali. Dallo studio delle biforcazioni di un sistema dinamico è possibile prevedere cambiamenti inaspettati nella dinamica del sistema. Questi cambiamenti possono talvolta essere rilevanti e repentini (le cosiddette "catastrofi") e possono avere, se il sistema è il modello di un fenomeno fisico, conseguenze anche gravi e pericolose. Attualmente lo studio delle biforcazioni si limita, per i notevoli problemi di calcolo numerico che pone, a sistemi relativamente piccoli.
Tra le applicazioni ancora da sviluppare, le più attuali sono quelle relative all'analisi dei sistemi ecologici, del comportamento di popolazioni e dei mercati finanziari. È stata recentemente anche proposta la possibilità di utilizzare tecniche basate sulla dinamica nonlineare per la ricerca di informazioni in grandi database di informazioni non omogenee.

Ringraziamenti

Tutte le immagini sono state prodotte dall'autore con software open-source o freeware eccetto la figura 8, per la quale si ringrazia la Nasa/Goddard Space Flight Center. Si ringraziano i (numerosi) autori dei programmi (open-source) *Octave, Gnuplot e Gimp*. Un particolare ringraziamento a Nicolas Desprez autore del programma (freeware) *Chaoscope* (http://www.chaoscope.org) utilizzato per generare alcune delle figure incluse nel testo.

Bibliografia

[1] Annovazzi-Lodi V., Benedetti M., Merlo S., Norgia M., Provinzano B.: *Optical Chaos Masking of Video Signals*. IEEE Photonics Tech. Letters, 2005, p. 19-9.

[2] Bilotta E., Gervasi S., Pantano P.: *Reading Complexity in Chua's Circuit by Music*. Int. J. of Bifurcation and Chaos, 2005, p. 15-2.

[3] Eckmann J.P., Ruelle D.: Ergodic Theory of Chaos and Strange attractors. *Rev. Modern Phys.*, Vol. 57, n. 3, 1985.

[4] Garfinkel A., Spano M.L., Ditto W.L., Weiss J.N.: Controlling Cardiac Chaos. *Science*, Vol. 257, p. 1230-1235.

[5] Goldberg A.L., West B.J.: Application of Nonlinear Dynamics to Clinical Cardiology. *Ann. N.Y. Acad. Sci.* Vol. 504, 1987, p. 195-212.

[6] Goldberg A.L., West B.J.: *Fractals in Physiology and Medicine*. Yale J. Biol.

[7] Kennedy M.P.: *Basic Concepts of Nonlinear Dynamics and Chaos*. In IEEE ISCAS 1994 Circuit and Systems Tutorials, ed. C.Toumazou, 1994.

[8] Kennedy M.P.: Three steps to Chaos – Part I : Evolution. *IEEE Transactions on Circuits and Systems – I Fundamental Theory*, Vol. 40, n. 10, 1993.

[9] Kennedy M.P.: Three steps to Chaos – Part II : A Chua Circuit primer. *IEEE Transactions on Circuits and Systems – I Fundamental Theory*, Vol. 40, n. 10, 1993.

[10] Lorenz Edward N.: Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the Atmosferic Sciences*, Vol. 20, 1963.

[11] Lorenz Edward N.: The Mechanics of Vacillation. *Journal of the Atmosferic Sciences*, Vol. 20, 1963.

[12] Lorenz Edward N.: *The Problem of Deducing the Climate from the Governing Equations*. Tellus, Vol. 16, 1964.

[13] Poincaré Henri: *Geometria e Caso*. Universale Boringhieri, Torino, 1995.

[14] Strogatz S.H.: *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Addison Wesley, N.Y. 1994.

APPENDICE - *SISTEMI DINAMICI NONLINEARI*

Qui di seguito vengono considerati alcuni aspetti più tecnici relativi ai sistemi dinamici nonlineari. Si tenga presente che non si pretende di essere rigorosi in senso matematico, e che alcune questioni senz'altro importanti, ma irrilevanti per una trattazione qualitativa come la presente, sono stati omessi.

1. *Unicità e continuità delle soluzioni*

Un sistema dinamico a tempo continuo può essere definito dalla equazione differenziale ordinaria:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = F[\boldsymbol{x}(t), t] \qquad (1)$$

dove $\boldsymbol{x}(t)$ è lo stato del sistema, che supponiamo essere definito su uno spazio a n dimensioni e la derivata di $\boldsymbol{x}(t)$ rispetto al tempo è indicata con $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$. La funzione $F(\cdot,\cdot)$ descrive un *campo vettoriale*, in quanto definisce in ogni punto dello spazio di stato un vettore di "velocità".
Se supponiamo che $F(\cdot,\cdot)$ sia continua quasi ovunque e sia definita la condizione iniziale $\boldsymbol{x}_0 \equiv \boldsymbol{x}(t_0)$, *esiste*, è *unica* ed è *continua* una funzione del tempo $\phi(t, \boldsymbol{x}_0, t_0)$ che soddisfa le due condizioni:

$$\phi(t_0, \boldsymbol{x}_0, t_0) = \boldsymbol{x}_0$$

e

$$\dot{\phi}(t, \boldsymbol{x}_0, t_0) = F[\phi(t, \boldsymbol{x}_0, t_0), \mathrm{t}]$$

La funzione $\phi(t, \boldsymbol{x}_0, t_0)$ è detta *soluzione* o *traiettoria* del sistema definito dalla (1).
Per semplicità supponiamo il campo vettoriale non esplicitamente dipendente dal tempo, possiamo quindi arbitrariamente fissare $t_0 = 0$ e definire formalmente le traiettorie con la notazione semplificata $\phi(t, \boldsymbol{x}_0, 0) \equiv \phi_t$ così da poter scrivere $\boldsymbol{x}(t) \equiv \phi_t(\boldsymbol{x}_0)$. L'introduzione di questo operatore è molto comoda, si ha infatti banalmente $\phi_{t1+t2} \equiv \phi_{t1}\,\phi_{t2}$, ma, soprattutto, data l'ipersfera $S_r(\boldsymbol{x}_0)$ di raggio r centrata su $\boldsymbol{x}_0$, possiamo scrivere $\phi_t[S_r(\boldsymbol{x}_0)]$ per indicare il fascio di traiettorie generate usando i punti della sfera come condizioni iniziali.

2. *Insiemi limite e attrattori*

Le traiettorie di un sistema dinamico stabile finiscono, eventualmente dopo un transitorio, in un insieme limite che rappresenta un sottoinsieme delle soluzioni di regime (stabili) del sistema. Ovviamente si possono avere più insiemi limite, ogni insieme limite rappresenta in questo caso un diverso *attrattore*, e i diversi insiemi di punti che portano ad ogni singolo attrattore sono chiamati *bacini di attrazio-*

ne. I bacini d'attrazione sono insiemi di punti dello spazio di stato, talvolta dotati a loro volta di geometrie molto complesse.
Definiamo meglio questi concetti e classifichiamo la struttura geometrica degli attrattori.
L'insieme limite Ω^+ definito dal comportamento del sistema per $t \to +\infty$, rappresenta le *soluzioni di regime* di un sistema e un punto $\boldsymbol{x}_\Omega$ è un *punto limite* di $\boldsymbol{x}_0$ se esiste una sequenza di tempi $t_k \to +\infty$ per la quale si abbia:

$$\lim_{k\to\infty} \phi_{t_k}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_\Omega$$

Tutti i punti che soddisfano questa condizione definiscono l'insieme limite Ω^+ della condizione iniziale $\boldsymbol{x}_0$ e che indichiamo con $\Omega^+(\boldsymbol{x}_0)$. Un insieme limite Ω^+ è *attrattivo* se esiste un intorno $S_\varepsilon(\Omega^+)$ tale per cui si abbia $\Omega^+(\boldsymbol{x}_0) = \Omega^+, \forall \boldsymbol{x}_0 \in S_\varepsilon(\Omega^+)$, e costituisce un *attrattore* se contiene almeno una traiettoria che si avvicina arbitrariamente a tutti i suoi punti in qualche istante di tempo.
Tutto quanto detto fino ad ora può essere ripetuto invertendo la freccia del tempo e definendo quindi gli insiemi limite Ω^- e trattando, di fatto, le situazioni non stabili.

3. *Classificazione degli insiemi limite – 1. i punti di equilibrio – regime costante*
I punti di equilibrio rappresentano il comportamento di regime più semplice e intuitivo. Sono tutti i punti dello spazio di stato dove si annulla il campo vettoriale definito dalla (1), cioè le soluzioni di $F(\boldsymbol{x}) = 0$ o, equivalentemente, i punti per cui si ha $\phi_t(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0, \forall_t$.
I sistemi nonlineari possono ovviamente avere più di un punto di equilibrio, si pensi per esempio ai singoli bit delle memorie dei calcolatori: questi circuiti sono generalemente dotati di tre punti di equilibrio, due stabili ed uno instabile. I due stati stabili rappresentano i valori binari 0 e 1, la transizione del bit di memoria tra i due stati avviene perturbando il circuito in modo da portarne il funzionamento da un bacino di attrazione all'altro.

4. *Classificazione degli insiemi limite – 2. le traiettorie periodiche – regime periodico*
Gli stati per cui si ha $\phi_T(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0$ per qualche valore $T > 0$ sono detti stati periodici. Anche i punti di equilibrio soddisfano questa condizione, e il regime costante può essere considerato infatti un caso particolare di quello periodico. Se consideriamo gli stati periodici in senso proprio (quelli che non soddisfano le condizioni di regime costante), possiamo definire *ciclo limite* una traiettoria chiusa e isolata del sistema.
Tutti gli oscillatori, uno tra i circuiti più diffusi in qualsiasi sistema elettronico, sono caratterizzati proprio da un ciclo limite stabile.
Ovviamente se uno stato è periodico di periodo T lo è anche di periodo $2T$, $3T$... Il piu' piccolo valore di T per cui è soddisfatta la condizione di periodicità è chiamato *periodo* del ciclo limite. Geometricamente, nello spazio di stato, un ciclo limite corrisponde ad una linea chiusa.

5. *Classificazione degli insiemi limite – 3. il regime quasiperiodico*
In alcuni casi le soluzioni di un sistema dinamico possono avere comportamenti più complicati di quelli visti sopra, se per esempio si ha un sistema dinamico di ordine tre o superiore, è possibile che le traiettorie siano esprimibili come combinazione di due funzioni periodiche di periodo incommensurabile. In questo caso le traiettorie non saranno propriamente periodiche, ma descriveranno nello spazio di stato una superficie toroidale.

6. *Classificazione degli insiemi limite – 4. il regime caotico e ipercaotico*
Se un sistema dinamico autonomo è dotato di un insieme limite attrattivo, ma non sono soddisfatte le condizioni viste sopra, allora si è in un caso di regime caotico o ipercaotico. Classificare questi tipi di insiemi limite non è banale. Da un punto di vista sperimentale il comportamento caotico si manifesta in modo apparentemente simile ad un processo casuale, resta confinato all'interno di un attrattore, e non mostra nessuna periodicità o quasiperiodicità... però è deterministico.
Una risposta quantitativa al problema della classificazione dei comportamenti di regime di un sistema dinamico è data dal calcolo degli esponenti di Lyapunov di una traiettoria (o di un insieme di traiettorie). Gli esponenti di Lyapunov sono in numero equivalente alle dimensioni dello spazio di stato del sistema e rappresentano una misura "statistica" della sensitività del sistema alle condizioni iniziali.
Consideriamo una piccola sfera $S_\varepsilon(\boldsymbol{x})$ di condizioni iniziali, usando la notazione introdotta sopra, dopo un tempo t questa sfera di condizioni iniziali sarà stata trasformata dal campo vettoriale del sistema in un ellissoide $\phi_t[S_\varepsilon(\boldsymbol{x})]$. In generale l'ellissoide avrà degli assi principali di lunghezza differente, e, se la sfera iniziale ha diametro 2ε, ci si può ragionevolmente aspettare che tra gli assi principali dell'ellissoide ce ne siano alcuni di lunghezza maggiore di 2ε, e alcuni di lunghezza inferiore. Se per esempio siamo nel caso di una traiettoria che converge verso un punto di equilibrio stabile troveremo che l'ellissoide corrisponde ad una *contrazione* della sfera iniziale e tutti i suoi assi saranno di lunghezza in-

feriore a 2ε. Questa operazione viene ripetuta più volte lungo la traiettoria, normalizzando ogni volta gli assi dell'ellissoide e procedendo per piccoli passi temporali. Se la sfera iniziale ha, ad ogni passo, diametro 2ε, calcoliamo per ogni passo p i numeri:

$$\eta_{jp} = \log \frac{\alpha_{jp}}{2\varepsilon}$$

dove con α_{jp} abbiamo indicato il j-esimo asse principale dell'ellissoide al passo p. Definiamo esponenti di Lyapunov λ_j i numeri che otteniamo come valore medio, dopo un tempo sufficientemente lungo, dei valori η_{jp} e rappresentano il valore medio esponenziale della separazione delle traiettorie lungo il flusso definito dal campo vettoriale. Il metodo qui esposto per il calcolo degli esponenti di Lyapunov non è particolarmente efficiente, il calcolo viene abitualmente eseguito utilizzando il sistema variazionale associato al sistema dinamico. Sfruttando le proprietà di ergodicità dei flussi definiti dai sistemi dinamici è poi possibile convergere ai valori esatti molto più rapidamente. Per una trattazione più approfondita si rimanda a [3, 8, 14].
Nella tabella 1 sono riassunte le varie caratteristiche dei comportamenti possibili in un sistema dinamico autonomo, in base ai valori degli esponenti di Lyapunov ed alla dimensione geometrica degli insiemi limite corrispondenti.
La dimensione degli attrattori strani è non intera, si tratta infatti di oggetti frattali, i casi più conosciuti e studiati, i sistemi caotici di dimensione tre, hanno attrattori di dimensione compresa tra due e tre, come negli esempi mostrati nella figura 5 e nella figura 6.

TABELLA 1 - CLASSIFICAZIONE DEI POSSIBILI COMPORTAMENTI DI UN SISTEMA DINAMICO

Regime	Insieme limite	Esp. di Lyapunov	Dimensione
Costante	punto di equilibrio	$0 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$	0
Periodico	linea chiusa	$\lambda_1 = 0$, $0 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$	1
Quasiperiodico	*k*-toro	$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$ $0 \geq \lambda_{k+1} \geq \cdots \geq \lambda_n$	*k*
Caotico	frattale	$\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 = 0$ $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j < 0$	non intera
Ipercaotico	frattale	$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k > 0,\ \lambda_{k+1} = 0$ $\sum_{j=k+2}^{n} \lambda_j < 0$	non intera

Giancarlo Storti Gajani è Professore Associato di Elettrotecnica presso il Dipartimento di Elettronica e Informazione del Politecnico di Milano. Attualmente i suoi campi di interesse riguardano la teoria dei circuiti, lo studio delle proprietà dei circuiti dinamici nonlineari e la simulazione dei circuiti elettronici. Su questi argomenti è autore o coautore di circa 40 lavori pubblicati su rivista o presentati a congresso.
E-mail: storti@elet.polimi.it